

الحل :

المطلوب إثبات أنه لكل $\varepsilon > 0$ يجب إيجاد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث أن :

$$\forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

الآن نلاحظ أن :

$$\left| \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2x - x^2 - 1}{2(x^2 + 1)} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} \right| = \frac{1}{2} \frac{|x - 1|^2}{x^2 + 1} < \frac{1}{2} |x - 1|^2 \quad \dots (1)$$

وذلك لأن $x^2 + 1 \geq 1$ ، وبالتالي فإن $\frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$.

ولكي يكون الحد الأخير من اليمين في المتباينة (١) أقل من العدد ε ، أي أن $\frac{1}{2} |x - 1|^2 < \varepsilon$ فيجب أن يكون

$|x - 1| < \sqrt{2\varepsilon}$. مما سبق يمكن اختيار $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$ ليتحقق المطلوب. لأنه إذا كان $0 < |x - 1| < \delta = \sqrt{2\varepsilon}$ فمن

(١) ينتج مباشرة أن :

$$\left| \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} |x - 1|^2 < \frac{1}{2} (\sqrt{2\varepsilon})^2 = \varepsilon$$